Kolloqium Implizite Funktionen **13.12.2007**
Carsten Erdmann

Einleitung zum Bifurkationssatz von Crandall - Rabinowitz

Im Folgenden werden wir uns auf das Bifurkationsergebnis, welches aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, konzentrieren. Sei

$$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}$$

eine Funktion, die in einer gewissen Umgebung vom Ursprung definiert ist.

Weiterhin nehmen wir an, dass $F \in C^p, p > 2$. Außerdem sei $F(o) = 0$ und o ist ein kritischer Punkt von F, also $F'(o) = o$ (mit o bezeichnen wir ab hier und im Folgenden den Nullvektor). Dann folgt aus der Taylorentwicklung

$$F(x) = F(o) + F'(o)x + \frac{1}{2}(F''(o)x, x) + o(\|x\|^2) = \frac{1}{2}(F''(o)x, x) + o(\|x\|^2), \quad \|x\| \to 0.$$

Wenn $F''(o)$ eine reguläre $m \times m$ Matrix ist, dann existiert eine Umgebung vom Ursprung in welcher der einzige kritische Punkt von F der Punkt o ist.

Das folgende Morse-Lemma trifft eine Aussage darüber, dass wir in einer solchen Umgebung eine (nichtlineare) Transformation von $x \to \xi$ finden können für die gilt

$$F(x) = \frac{1}{2}(F''(o)\xi, \xi).$$

In diesem Fall ist der Graph von F eine *quadratische Mannigfaltigkeit* in den neuen Variablen.

Lemma 1.1. (A.P. Morse) Sei $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad (m \in \mathbb{N})$ eine Funktion, die in einer gewissen Umgebung U vom Ursprung definiert ist, sowie $F \in C^p, p > 2, p \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $o \in U$ und

$$F(o) = 0, \quad F'(o) = o, \quad F''(o) \in GL(m, \mathbb{R}, \text{regulär})$$

Dann existiert eine Funktion $\xi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, die in einer (verkleineren) Umgebung V von o definiert ist. Für diese gilt

$$\xi(o) = o, \quad \xi'(o) = I$$
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(F''(o)\xi(x), \xi(x)\right).$$

Beweis.
1. Wir definieren uns Funktionen so, dass $F(x)$ gleich dem Skalarprodukt dieser in einer gewissen Umgebung von o ist.

Sei

$$Q := \frac{1}{2}F''(o).$$

Integrieren wir nun F partiell unter Ausnutzung der Eigenschaften von F, dann erhalten wir

$$F(x) = F(x) - 0 \overset{n.V.}{=} F(x) - F(o) = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(tx)dt \overset{p.I.}{=} \left[(t-1)\frac{d}{dt}F(tx)\right]_0^1 - \int_0^1 (t-1)\frac{d^2}{dt^2}F(tx)dt$$

$$= -\frac{d}{dt}F(tx)|_{x=0} - \int_0^1 (t-1)\frac{d^2}{dt^2}F(tx)dt \overset{n.V.}{=} 0 + \int_0^1 (1-t)\frac{d^2}{dt^2}F(tx)dt \overset{(*)}{=} \int_0^1 (1-t)\langle F''(tx)\cdot x, x\rangle dt$$
$$= \left\langle \left[\int_0^1 (1-t)F''(tx)dt\right] x, x \right\rangle$$

(*) $\frac{d^2}{dt^2}F(tx) = \frac{d}{dt}(F'(tx)\cdot x) = \langle F''(tx)\cdot x, x\rangle$

Setzen wir $B(x) := \int_0^1 (1-t)F''(tx)dt$, dann erhalten wir $F(x) = \langle B(x)x, x\rangle$.
Nun suchen wir eine Abbildung $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, für die gilt

$$\langle QR(x)x, R(x)x\rangle = \langle B(x)x, x\rangle.$$

Im Folgenden bezeichnen wir mit R^* die adjungierte Matrix zu R, dann folgt

$$\langle R^*(x)QR(x)x, x\rangle = \langle B(x)x, x\rangle.$$

Die Gleichheit gilt aber offensichtlich dann, wenn

$$R^*(x)QR(x) = B(x) \tag{B.1.}$$

in einer gewissen Umgebung von o im $\mathbb{R}^m$. Die Matrizen Q und B sind bereits bekannt, weiterhin wissen wir dass $B \in C^{p-2}$.

2. Im folgenden Transformieren wir das Problem in ein Nullstellen Problem unter zuhilfenahme eines Operators, um (B.1.) beweisen zu können

Die Identität (B.1.) kann man auch sehen als

$$H(x, R(x)) := R^*(x)QR(x) - B(x) = 0$$

Für die Frechet-Ableitung nach der zweiten Komponente, gilt dann

$$H_2'(x, R(x))T = \frac{d}{dt}H\left(x, R(x) + t \cdot T(x)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left((R(x) + t \cdot T(x))^* Q(R(x) + t \cdot T(x)) - B(x)\right)|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left((R(x)^* + t \cdot T(x)^*)Q(R(x) + t \cdot T(x)) - B(x)\right)|_{t=0} = (T(x)^* Q(R(x) + t \cdot T(x)) +$$
$$+ (R(x)^* + t \cdot T(x)^*)QT(x))|_{t=0} = T(x)^* QR(x) + R(x)^* QT(x).$$

Sei $W \subset U$ eine Umgebung von o, $K = GL(m, \mathbb{R})$ und $S = GL(m, \mathbb{R}, symmetrisch)$, $L \subset K$ und $H : W \times L \to S$ eine Abbildung. Weil B(x) und Q symmetrisch sind, ist auch H symmetrisch.

Offensichtlich ist $H \in C^{p-2}$ und es gilt ebenfalls, dass

$$H(o, I) = R^*(o)QR(o) - B(o) = IQI - Q = 0$$
$$H_2'(o, I)T = (R^*(o)QT(o) + T^*(o)QR(o))|_{R=I} = QT(o) + T^*(o)Q.$$

Weil Q regulär und symmetrisch ist, existiert für alle $P \in S$ ein T mit

$$H_2'(o, I)T = P$$

(in diesem Fall ist $T = \frac{1}{2}Q^{-1}P$). An dieser Stelle haben wir somit die Surjektivität gezeigt.

Weiterhin teilen wir K in 2 Teile. Sei K_2 so gewählt, dass $I \in K_2$ und $K_1 = Ker(H_2'(o, I))$. Dann ist $H_2'(o, I)$ ein Isomorphismus von K_2 in S. Setzen wir nun $L = K_2$ und wenden darauf den Satz über implizite Funktionen an. Dann existiert eine Umgebung V_1 von o im $\mathbb{R}^m$ und eine Umgebung V_2 der Identität I in L, so dass für jedes $x \in V_1$ ein eindeutiges $R(x) \in V_2$ existiert, welches

$$R^*(x)QR(x) - B(x) = 0$$

genügt.

Zusammenfassend gilt $R(o)o = 0$, $(R(x)x)'|_{x=0} = I$ und $\langle QR(x)x, R(x)x\rangle = F(x)$ für alle $x \in V := V_1$. Somit erfüllt die Abbildung $\xi := R(x)x$ alle Eigenschaften, die vorausgesetzt wurden.

$\square$

Wir konzentrieren uns jetzt auf eine Beschreibung der Lösungsmenge der Gleichung

$$G(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \tag{1.1.}$$

wenn $G(x) = (Ax, x)$ und A eine reguläre symmetrische 2×2 Matrix, dann lässt sich (1.1.) schreiben als

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0. \tag{1.2.}$$

Wenn $a_{11} \neq 0$, dann können wir die linke Seite von (1.2.) faktorisieren und es folgt

$$\left(a_{11}x_1 + \left(a_{12} - \sqrt{D}\right) x_2\right) \left(a_{11}x_1 + \left(a_{12} + \sqrt{D}\right) x_2\right) = 0.$$

wobei

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det(A).$$

Wenn A positiv (negativ) definit ist (in diesem Fall wird das Skalarprodukt nur für den Nullvektor 0), dann enthält die Lösungsmenge S von (1.1.) nur den Punkt

$$S = \{(0,0)\}.$$

Für $D = 0$ (A nicht mehr regulär und weiterhin ist semidefinit, weil $\det(A) = -D = 0$) gilt

$$S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0\right\}.$$

Die interessanteste Struktur hat S, wenn A eine indefinite Matrix ($D > 0$) ist. In diesem Fall ist S die Vereinigung von 2 Geraden, welche sich im Ursprung schneiden. Diese Erkenntnis zusammen mit dem Morse Lemma motivieren die folgende Aussage.

Satz 1.2. Sei U eine Umgebung von $(0,0) \in \mathbb{R}^2, F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F \in C^p(U)$, $p > 2$. Weiterhin sei

$$F(o) = 0, \quad F'(o) = o \tag{1.3.}$$

und die symmetrische Matrix $F''(o)$ regulär und indefinit. (1.4.)

Dann ist die Lösungsmenge S von $F(x) = 0$ in einer gewissen (verkleinerten) Umgebung V von $(0,0)$ die Vereinigung von zwei Kurven Γ_1, Γ_2, die sich *transversal* im Ursprung schneiden (transversal heißt in diesem Fall, dass der Schnittwinkel $\alpha \neq 0$).

Beweis. Aus dem Lemma von Morse folgt, dass eine Abbildung $\xi = (\xi_1, \xi_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\xi \in C^{p-2}$ existiert, mit

$$\xi(o) = o, \quad \xi'(o) = I, \tag{1.5.}$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}F''(o)\xi(x), \xi(x)\right)$$

wobei x ein Punkt in einer gewissen Umgebung von $(0,0)$. Wir setzen $A = \frac{1}{2}F''(o)$. Wenn $a_{11} \neq 0$, dann ist die Gleichung $(A\xi, \xi) = 0$ äquivalent mit dem Ausdruck

$$\left(a_{11}\xi_1 + \left(a_{12} - \sqrt{D}\right)\xi_2\right)\left(a_{11}\xi_1 + \left(a_{12} + \sqrt{D}\right)\xi_2\right) = 0. \tag{1.6.}$$

Die Indefinitheit von A führt auf

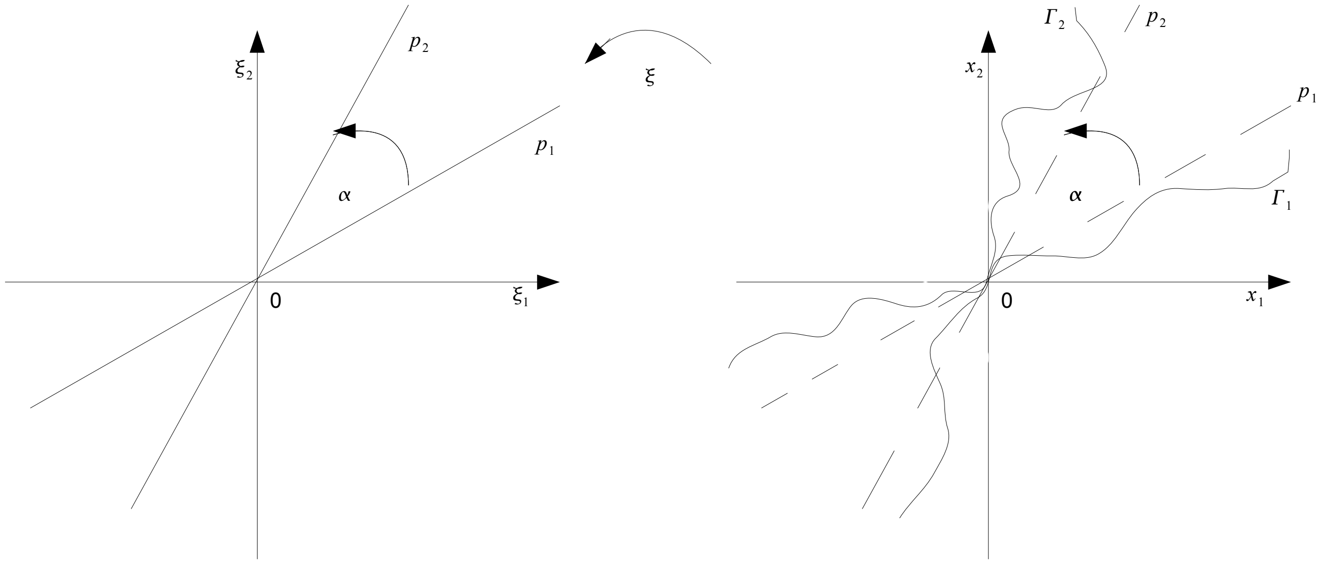
$$0 > \det(A) = -D.$$

Die Lösungen von (1.6.) sind die beiden folgenden Geraden

$$p_1 = \left\{(\xi_1, \xi_2) : a_{11}\xi_1 + \left(a_{12} - \sqrt{D}\right)\xi_2 = 0\right\},$$

$$p_2 = \left\{(\xi_1, \xi_2) : a_{11}\xi_1 + \left(a_{12} + \sqrt{D}\right)\xi_2 = 0\right\}.$$

Diese schneiden sich in $(0,0)$ mit einem Winkel $\alpha \neq 0$.



Aus (1.5.) folgt nun, dass sich die Lösungsmenge von $F(x) = 0$ (in einer gewissen Umgebung vom Ursprung) durch die beiden Kurven

$$\Gamma_1 = \left\{(x_1, x_2) : a_{11}\xi_1(x) + \left(a_{12} - \sqrt{D}\right)\xi_2(x) = 0\right\},$$
$$\Gamma_2 = \left\{(x_1, x_2) : a_{11}\xi_1(x) + \left(a_{12} + \sqrt{D}\right)\xi_2(x) = 0\right\}.$$

darstellen lässt.

Die Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C^{p-2}$ haben im Punkt $(0, 0)$ die Tangenten p_1 und p_2.

Falls $a_{11} = 0$, dann wird (1.6.) zu

$$(2a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2)\xi_2 = 0.$$

Damit ergeben sich als Lösungen die beiden Geraden

$$p_1 = \{(\xi_1, \xi_2) : 2a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 = 0\},$$
$$p_2 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_2 = 0\}.$$

und somit lässt sich auch hier die Lösungsmenge angeben durch

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : 2a_{12}\xi_1(x) + a_{22}\xi_2(x) = 0\},$$
$$\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : \xi_2(x) = 0\}.$$

□

Korrollar 1.3. Sei $f = f(x, \lambda) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in C^p(U), p > 2,$ und U eine Umgebung von $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Weiterhin sei

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 0, \tag{1.7.}$$

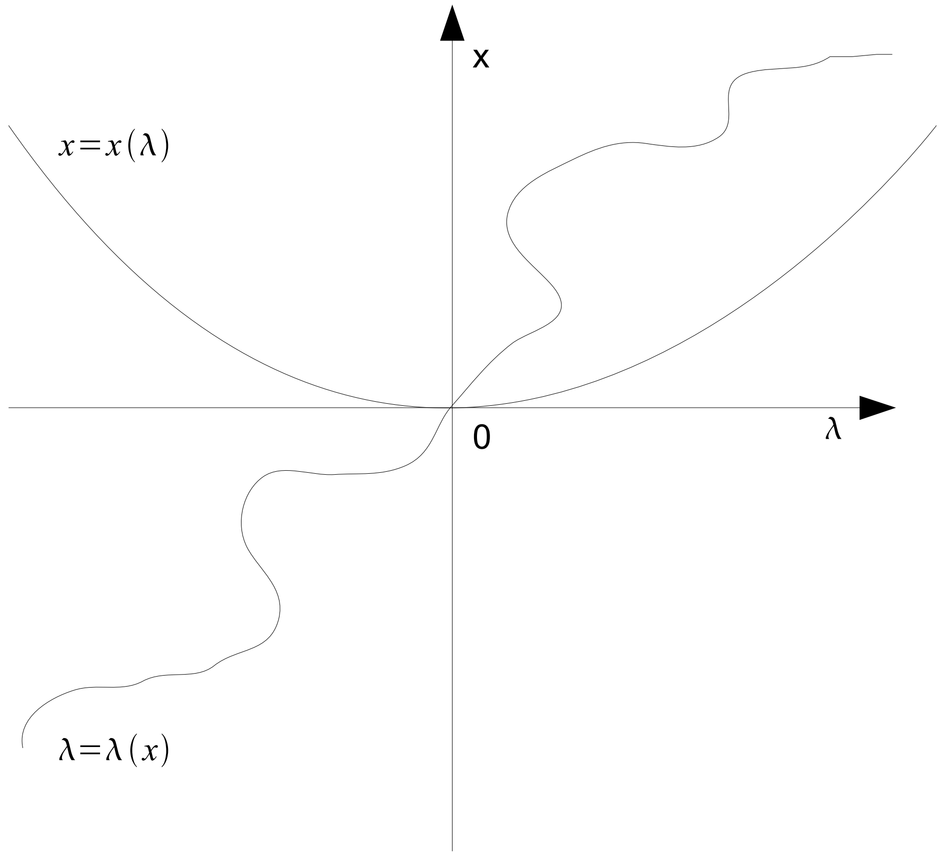
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0. \tag{1.8.}$$

Dann besteht die Lösungsmenge von $f(x, \lambda) = 0$ in einer gewissen (verkleinerten) Umgebung V von (0,0) aus den beiden Kurven

$$\Gamma_1 = \{(x, \lambda) : x = \hat{x}(\lambda), \lambda \in (-\epsilon, \epsilon), \hat{x}(0) = \hat{x}'(0) = 0\}, \tag{1.9.}$$

$$\Gamma_2 = \left\{(x, \lambda) : \lambda = \hat{\lambda}(x), x \in (-\epsilon, \epsilon), \hat{\lambda}(0) = 0\right\}, \tag{1.10.}$$

mit $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C^{p-2}$.



Beweis. Die Funktion f genügt den Voraussetzungen aus Satz 1.2. Die Bedingung (1.3.) folgt aus (1.7.) und wegen (1.8.) wissen wir, dass die Determinante der Matrix

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(f''(0,0)) = -\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0)\right]^2 < 0$$

ist, also ist auch (1.4.) erfüllt. Angenommen, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ (das wäre dann a_{11} der Matrix A). Dann ist aus dem selben Grund wie im Beweis von Satz 1.2. die Menge aller Nullpunkte von f in einer gewissen Umgebung von $(0,0)$ durch die Vereinigung der beiden Kurven

$$\Gamma_1 = \{(x,\lambda) : \xi_1(x,\lambda) = 0\}$$
$$\Gamma_2 = \left\{(x,\lambda) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\xi_1(x,\lambda) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0)\xi_2(x,\lambda) = 0\right\}.$$

darstellbar.

Aus dem Satz über implizite Funktionen wissen wir aber auch, dass wir die Kurven wie in (1.9.) und (1.10.) geschehen, parametrisieren können.

Falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$ dann nimmt die Gleichung

$$\left(\frac{1}{2}f''(0,0)\xi(x,\lambda), \xi(x,\lambda)\right) = 0$$

die Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0)\xi_1(x,\lambda)\xi_2(x,\lambda) = 0$$

an. Die Menge aller Nullpunkte lässt sich darstellen durch

$$\Gamma_1 = \{(x,\lambda) : \xi_1(x,\lambda) = 0\},$$
$$\Gamma_2 = \{(x,\lambda) : \xi_2(x,\lambda) = 0\}.$$

Wenden wir hierauf den Satz über implizite Funktionen an, dann kommen wir wieder zu (1.9.) und (1.10.). $\square$

Die folgende Aussage ist eine einfache eindimensionale Variante des Bifurkationssatzes von Crandall-Rabinowitz .

Korrollar 1.4. Sei $f = f(x, \lambda) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^p, p > 2$, in einer Umgebung U vom Punkt $(0, \lambda_0)$ definiert. Weiterhin sei

$$f(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.11.}$$

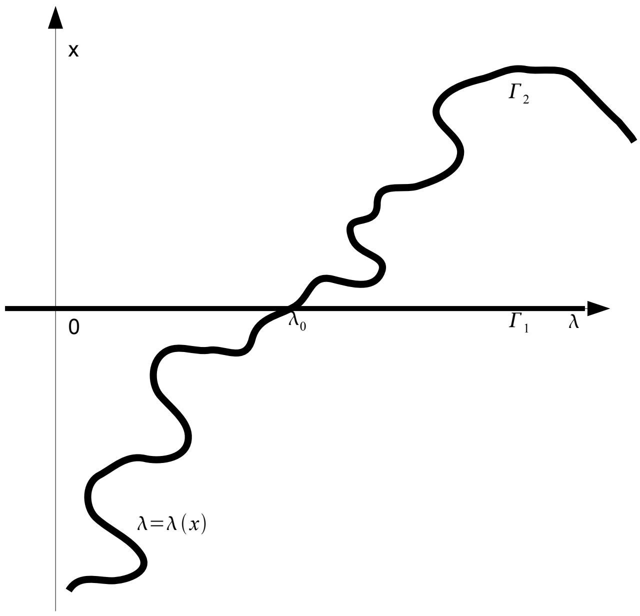
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda_0) = 0, \tag{1.12.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, \lambda_0) \neq 0. \tag{1.13.}$$

Dann ist $(0, \lambda_0)$ ein Punkt der Bifurkation von $f(x, \lambda) = 0$. In einer (verkleinerten) Umgebung V von $(0, \lambda_0)$ bilden die Lösungen ungleich Null die Menge $\Gamma \setminus \{(0, \lambda_0)\}$ wobei

$$\Gamma = \Big\{(x, \lambda) : \lambda = \hat{\lambda}(x), \quad x \in (-\epsilon, \epsilon)\Big\},$$

$\Gamma \in C^{p-2}$ und $\hat{\lambda}(0) = \lambda_0$.



Beweis. Sei O.b.d.A. $\lambda_0 = 0$. Wegen (1.11.) gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(0, 0) = 0.$$

Aufgrund von (1.12.) und (1.13.) sind aber auch (1.7.) und (1.8.) erfüllt. In diesem Fall ist

$$\Gamma_1 = \{(x, \lambda) : x = 0\}.$$

Es folgt, dass alle Punkte der anderen Kurve $\Gamma := \Gamma_2$, welche ungleich 0 sind, die einzigen nicht trivialen Lösungen der Gleichung $f(x, \lambda) = 0$ (in einer gewissen Umgebung von $(0, 0)$) sind.

$\square$

Bemerkung 1.5.

1. Die Menge $\Gamma \setminus \{(0, \lambda_0)\}$ wird auch als *Ast der nicht trivialen Lösungen* von $f(x, \lambda) = 0$ bezeichnet.
2. Im Speziellen ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) garantiert die Bedingung (1.13.) dass Γ_1 und Γ_2 sich transversal schneiden. Daraus folgt, falls Γ_1 durch triviale Lösungen gebildet wird, dass die Menge $\Gamma_2 \setminus \{(0, \lambda_0)\}$ ein *Ast von nichttrivialen Lösungen* von $f(x, \lambda) = 0$ in einer gewissen Umgebung von $(0, \lambda_0)$ ist.

Beispiel 1.6.

Wir untersuchen bei den nachfolgenden Funktionen, ob in $\lambda_0 = 0$ für $f(x, \lambda) = 0$ ein Bifurkationspunkt vorliegt.

1. $f(x, \lambda) = x^3 - \lambda x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) = 3x^2 - \lambda$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(x, \lambda) = -1$
2. $f(x, \lambda) = x^3 - \lambda x - \sin(\lambda x)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) = 3x^2 - \lambda - \lambda \cos(\lambda x)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(x, \lambda) = -1 + \lambda x \sin(\lambda x) - \cos(\lambda x)$
3. $f(x, \lambda) = x^3 - \lambda x + \sin(\lambda x)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) = 3x^2 - \lambda + \lambda \cos(\lambda x)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(x, \lambda) = -1 - \lambda x \sin(\lambda x) + \cos(\lambda x)$
4. $f(x, \lambda) = x^3 - \lambda^2 x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) = 3x^2 - \lambda^2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(x, \lambda) = -2\lambda$

Bei 1. und 2. liegt nach Korollar 1.4. ein Bifurkationspunkt vor, bei 3. und 4. werden die partiellen Ableitungen nach $\partial x \partial \lambda$ im Punkt $(0, 0)$ jeweils Null, auch ist die gesamte Hess-Matrix in $(0, 0)$ gleich 0. In diesem Fall versagt also unser Lösungsansatz mittels Koordinatentransformation.

Literaturverzeichnis

[1] Pavel Drabek *"Introduction to Bifurcation Theory"*

[2] Otto Forster *"Analysis 1"*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1996

[3] Otto Forster *"Analysis 2"*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1996

[4] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, *"Taschenbuch der Mathematik"*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2003